Dr. Oliver Walter, Kiel https://www.walter-statistics.com

Berechnung der Eigenwerte einer (3, 3)-Matrix, die einen Parameter *a* enthält

Determinante nach der Regel von Sarrus berechnet

$$\begin{array}{|ccc|cc} 2-\lambda & 0 & a & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 & 5-\lambda \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \end{array}$$

, ergibt die zu lösende charakteristische Gleichung:

$0 = (2-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 0 + 0a - ((5-\lambda)a + 0 + 0))$
$\Leftrightarrow 0 = (2-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - (5-\lambda)a$

Ein Eigenwert ist immer gleich 5, da dann die Gleichung für jedes *a* erfüllt ist:

$\lambda_1 = 5$

für $\lambda \neq 5$:

$0 = (2-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - (5-\lambda)a \mid : (5-\lambda)$
$\Leftrightarrow 0 = (2-\lambda)(3-\lambda) - a$
$\Leftrightarrow 0 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - a$
$\Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - a$

Anwendung der p-q-Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen:

$\lambda_{2/3} = 2,5 \pm \sqrt{(6,25 - 6 + a)}$
$\Leftrightarrow \lambda_{2/3} = 2,5 \pm \sqrt{(0,25 + a)}$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2,5 + \sqrt{(0,25 + a)} = [5 + 2\sqrt{(0,25 + a)}]/2 = [\sqrt{(1 + 4a)} + 5]/2$
$\Rightarrow \lambda_3 = 2,5 - \sqrt{(0,25 + a)} = [5 - 2\sqrt{(0,25 + a)}]/2 = -[\sqrt{(1 + 4a)} - 5]/2$

Die Lösungsmenge lautet also für alle $a \geq 0$:

$L = \{\lambda \mid -[\sqrt{(1 + 4a)} - 5]/2, [\sqrt{(1 + 4a)} + 5]/2, 5\}$.

Bestätigt durch ein Computeralgebrasystem:

```
eigenvalues(%);
```

$$[[-\frac{\sqrt{4\,a+1}-5}{2}, \frac{\sqrt{4\,a+1}+5}{2}, 5]$$